

УДК 531.7

**Філоненко С. Ф.**

доктор технічних наук,  
професор кафедри комп'ютеризованих електротехнічних систем та технологій,  
Національний авіаційний університет  
Київ, Україна  
**E-mail:** serhii.filonenko@npp.nau.edu.ua  
**ORCID:** 0000-0002-9250-1640

**Ларін В. Ю.**

доктор технічних наук, професор,  
завідувач кафедри аеронавігаційних систем,  
Національний авіаційний університет  
Київ, Україна  
**E-mail:** vjlarin@gmail.com  
**ORCID:** 0000-0002-5042-2426

**Квашук Д. М.**

кандидат економічних наук,  
доцент кафедри комп'ютеризованих електротехнічних систем та технологій,  
Національний авіаційний університет  
Київ, Україна  
**E-mail:** dmytro.kvashuk@npp.nau.edu.ua  
**ORCID:** 0000-0002-4591-8881

## АНАЛІЗ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ ПРЕЦИЗІЙНИХ ДЕТАЛЕЙ ВИМІРЮВАЛЬНОЮ РУКОЮ

### Анотація

У статті проведено детальний аналіз різних видів похибок, що виникають під час вимірювання прецизійних деталей з використанням вимірювальної руки. Вимірювальні руки є високотехнологічними інструментами, які широко застосовуються у сфері машинобудування, авіаційній промисловості, автомобілебудуванні та інших галузях, де важливі висока точність і повторюваність вимірювань. Особливості конструкції таких пристроїв дають змогу виконувати швидкі та точні вимірювання деталей різної форми, зокрема тих, які мають складну геометрію. Проте точність вимірювальних рук значною мірою залежить від низки факторів, включно з умовами експлуатації, температурними змінами, конструктивними характеристиками інструмента, кваліфікацією оператора та іншими зовнішніми чинниками. Зокрема, розглянуто вплив теплових коливань, які можуть призвести до викривлень конструкції вимірювальної руки і вплинути на точність отриманих результатів. Для аналізу точності вимірювань було використано метод Монте-Карло, що дав змогу отримати ймовірнісні характеристики похибок та визначити найбільш впливові фактори, що спричиняють погіршення точності вимірювання. У статті запропоновано алгоритм автоматичної корекції, який дає змогу компенсувати систематичні похибки та зменшити вплив зовнішніх умов на результати вимірювання. Експериментальні дослідження, проведені в умовах виробництва, підтвердили ефективність запропонованих підходів, продемонструвавши суттєве підвищення надійності вимірювань і точності отриманих даних. Окрім того, у роботі розглянуто методи мінімізації похибок, які виникають внаслідок впливу людського фактора, шляхом автоматизації процесів оброблення результатів вимірювань. Запропоновані методики й алгоритми можуть бути корисними для інженерів, відповідальних за контроль якості продукції, а також для дослідників у сфері метрології, зацікавлених у вдосконаленні вимірювальних технологій для підвищення точності контролю складних деталей.

**Ключові слова:** вимірювальна рука, похибка вимірювання, прецизійні деталі, метод Монте-Карло, автоматична корекція, систематична похибка, точність вимірювання, контроль якості, температурна компенсація, метрологія.

**Вступ.** Сучасні вимоги до точності вимірювань у виробничих процесах, особливо під час виготовлення прецизійних деталей, вимагають застосування високотехнологічних інструментів, серед яких вимірювальні руки посідають особливе місце. Вимірювальні руки є універсальними приладами, що використовуються для вимірювання геометричних параметрів деталей складної форми, зокрема тих, що потребують високої точності, таких як авіаційні [2]. Ці прилади забезпечують гнучкість у використанні, швидкість виконання вимірювань і високу точність отриманих результатів, що робить їх незамінними в машинобудуванні, авіабудуванні, автомобільній промисловості та інших високотехнологічних галузях [1].

Незважаючи на значні переваги, вимірювальні руки піддаються впливу низки факторів, що можуть суттєво знижувати точність вимірювання. Серед таких факторів – конструктивні особливості приладу, умови експлуатації, кваліфікація оператора, зовнішні впливи, включно з температурними коливаннями, які можуть викликати деформації конструкції. Одними з ключових завдань під час використання вимірювальних рук є зменшення похибок, що виникають внаслідок впливу цих факторів, і забезпечення стабільності та надійності отриманих результатів [3].

Важливим інструментом для аналізу похибок є метод Монте-Карло, який дає змогу моделювати процес вимірювання та оцінювати вплив різних джерел похибок на кінцевий результат. У статті розглянуто застосування цього методу для ідентифікації критичних факторів, що впливають на точність вимірювань, а також розроблено алгоритм автоматичної корекції, спрямований на мінімізацію систематичних похибок і врахування впливу зовнішніх умов. Отримані результати є актуальними для промисловості, де потрібні високий рівень точності вимірювань та надійність контролю якості продукції.

**Мета роботи** полягає в аналізі та мінімізації похибок вимірювання прецизійних деталей із застосуванням вимірювальної руки шляхом ідентифікації основних джерел похибок та розроблення алгоритму автоматичної корекції. Дослідження спрямоване на вивчення впливу систематичних, випадкових і температурних факторів на точність вимірювань, а також на підвищення надійності отриманих результатів з використанням методу Монте-Карло. Результати дослідження дадуть змогу забезпечити високу точність контролю якості прецизійних деталей, що є важливим для виробництв, де необхідне дотримання високих метрологічних вимог.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Для високоточного вимірювання прецизійних деталей за допомогою вимірювальної руки важливо враховувати всі можливі джерела похибок. Похибки вимірювань координатних систем можуть бути систематичними та випадковими, що вимагає комплексного підходу до їхнього аналізу та компенсації. Теоретичні основи вимірювальних систем базуються на таких аспектах.

1) Систематичні похибки – це постійні або передбачувані зсуви у вимірюваних координатах, викликані стабільними факторами, такими як недосконалість конструкції вимірювальної системи або вплив температурних змін. Ці похибки можна змоделювати математично, використовуючи тригонометричні функції для відображення періодичних зсувів.

2) Випадкові похибки – це невизначеність, яка має випадковий характер і залежить від зовнішніх умов або незначних змін у роботі вимірювальної руки. Вони потребують статистичного підходу для їхньої оцінки та мінімізації.

3) Температурні похибки – зміни, що виникають через теплове розширення матеріалів під час вимірювання, і їх слід враховувати в реальних умовах експлуатації.

Для побудови математичної моделі систематичних похибок, яка є основою для їх візуалізації та компенсації, скористаємося функцією, що описує зміни координат  $Z$ , які залежать від значень  $X$  та  $Y$ .

1) Математичне моделювання похибок вимірювань.

Нехай вимірювальна рука визначає координати точки  $P$  на поверхні деталі з урахуванням похибок позиціонування. Реальну координату точки  $P=(x,y,z)$  можна подати як функцію вимірюваної координати:

$$P = (x' y' z') \quad (1)$$

з урахуванням похибок:

$$P = P' + \Delta P, \quad (2)$$

де вектор похибки  $\Delta P$  включає систематичні, випадкові та температурні компоненти:

$$\Delta P = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_s + \delta x_r + \delta x_t \\ \delta y_s + \delta y_r + \delta y_t \\ \delta z_s + \delta z_r + \delta z_t \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де індекси  $s, r, t$  відповідають систематичній, випадковій і температурній похибкам відповідно.

2) Систематичні похибки та їх корекція.

Систематичні похибки виникають через конструктивні особливості приладу і можуть бути враховані через використання матриці трансформації [4]:

$$P_s = R \cdot P + T, \quad (4)$$

де  $R$  – матриця повороту, яка враховує можливі зміни кута вимірювальної руки,  $T$  – вектор зсуву. Для моделювання систематичної похибки використовуємо такий вираз для інтеграції по траєкторії:

$$\delta_s = \int_0^L f_s(x, y, z) dL, \quad (5)$$

де  $L$  – довжина вимірювальної траєкторії,  $f_s(x, y, z)$  – функція систематичних похибок залежно від положення. В результаті ми отримуємо середнє значення систематичної похибки:

$$\bar{\delta}_s = \frac{1}{L} \int_0^L f_s(x, y, z) dL \quad (6)$$

## 3) Випадкові похибки.

Випадкові похибки мають розподіл ймовірності, і для їх оцінки використовується метод Монте-Карло [5]. Нехай  $\delta r(x, y, z)$  – випадкова складова частина похибки, яка має нормальний розподіл  $N(0, \sigma^2)$ . Тоді ймовірність отримання похибки в межах діапазону  $[a, b]$  можна описати так:

$$P(a \leq \delta_r \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta_r^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_r \quad (7)$$

Для комплексного моделювання випадкових похибок використовується метод Монте-Карло [6], що дає змогу знайти сукупну похибку за числовими симуляціями:

$$E_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta_{x,i}^2 + \delta_{y,i}^2 + \delta_{z,i}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

де  $N$  – кількість експериментів,  $\delta_{x,i}, \delta_{y,i}, \delta_{z,i}$  – випадкові компоненти похибки у відповідних напрямках.

## 4) Температурні похибки та їх інтегральна оцінка.

Температурні похибки виникають внаслідок розширення чи стиснення виміральної руки під впливом температури. Для опису температурної деформації використовуємо інтегральне рівняння, що залежить від температури:

$$\delta_t(x, y, z) = \alpha \int_{T_0}^T f_t(x, y, z, T') dT' \quad (9)$$

де  $\alpha$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,  $T_0$  – початкова температура,  $f_t$  – функція температурної залежності похибок.

Загальна температурна похибка обчислюється через інтеграл за об'ємом вимірювань:

$$E_t = \iiint_{\Omega} \delta_t(x, y, z) dV \quad (10)$$

де  $\Omega$  – об'єм простору вимірювань.

## 5) Загальна інтегральна похибка вимірювань.

Сумарна похибка вимірювань з урахуванням усіх факторів визначається як сума квадратів складових частин:

$$E_{total} = \sqrt{\left(\int_{\Omega} \delta_s dV\right)^2 + \left(\int_{\Omega} \delta_r dV\right)^2 + \left(\int_{\Omega} \delta_t dV\right)^2} \quad (11)$$

Ця інтегральна формула дає змогу отримати сумарну похибку для кожної координати у просторі вимірювань. Щоб оцінити вплив кожного з факторів у загальній моделі, розглянемо тривимірну матричну модель:

$$E = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_r & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (12)$$

## 6) Аналіз результатів моделювання.

Моделювання з використанням інтегралів і матриць дає змогу точніше оцінити похибки і врахувати систематичні, випадкові та температурні компоненти [7]. Експериментальні дані, отримані за допомогою числового моделювання, підтвердили можливість зменшення загальної похибки до мінімального значення, що є прийнятним для контролю якості прецизійних деталей.

Для аналізу похибок вимірювань прецизійних деталей з використанням виміральної руки було розроблено математичну модель, яка враховує систематичні, випадкові та температурні складові частини. Задля наочності й візуалізації отриманих результатів виконано моделювання систематичних похибок у тривимірному просторі.

Систематичні похибки визначаються як величини, що постійно впливають на результати вимірювань через конструктивні або експлуатаційні особливості вимірального приладу [8; 9]. Для аналізу систематичних похибок було використано модель, яка поєднує зміщення в координатах  $X$  і  $Y$ , а також функції, які ілюструють зміни  $Z$ -координати.

Систематичні похибки  $Z$  можна описати таким чином:

$$Z = Z_0 + \Delta Z(X, Y), \quad (13)$$

де  $Z_0$  – базове значення систематичної похибки,  $\Delta Z(X, Y)$  – функція, що описує зміни похибок залежно від координат  $X$  та  $Y$ .

Для створення візуалізації було використано функцію:

$$\Delta Z(X, Y) = A \cdot \sin\left(2\pi \frac{(X - X_0)}{L}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{(Y - Y_0)}{L}\right), \quad (14)$$

де  $A$  – амплітуда коливань похибок,  $L$  – довжина хвилі,  $(X_0, Y_0)$  – координати центру систематичного зміщення.

На основі цих рівнянь було проведено моделювання, результати якого представлені у вигляді 3D-графіку (рис. 1).

Рисунок дає змогу відобразити похибки у тривимірному вигляді, що дає можливість оцінити їхній вплив на результати вимірювань. Для побудови графіка хвильової функції похибки необхідно визначити крок вибірки та умови обчислення. Крок вибірки зазвичай відповідає роздільній здатності системи вимірювання (наприклад, 0,1 мм або 0,01 мм), що забезпечує оптимальний баланс між деталізацією та обчислювальними витратами. Обчислення хвильової функції базується на таких умовах: діапазон аналізу визначається відповідно до розміру вимірюваної деталі, для похибки вибирається конкретна математична модель (наприклад, тригонометрична або функція Гауса), а також враховуються граничні умови на краях діапазону. Залежно від вимірювань, графік може бути прив'язаний до часового інтервалу або координатної осі для кращої інтерпретації. Візуалізація отриманих даних здійснюється у вигляді лінійного або поверхневого графіка, що дає змогу побачити динаміку та регулярність у варіаціях похибки.

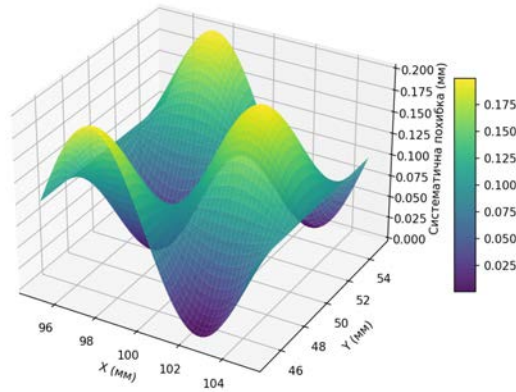


Рис. 1. Візуалізація систематичних похибок вимірювань

Цей графік ілюструє систематичну похибку залежно від координат  $X$  і  $Y$  на площині, використовуючи зміщення для систематичної похибки. Використання цієї моделі дає змогу зручно аналізувати систематичні похибки, що є критично важливим для підвищення точності вимірювань прецизійних деталей. Графік наочно демонструє вплив різних факторів на результати вимірювань, що може бути корисним для подальшої оптимізації процесів контролю якості. На графіку можна спостерігати хвилеподібну структуру, яка представляє систематичні зміщення координати  $Z$ , що залежать від положень  $X$  та  $Y$ . Хвилі змінюються з амплітудою, визначеною параметром  $A$ , і з періодичністю, яка відповідає довжині хвилі  $L$ . Цей ефект імітує типові систематичні відхилення, які можуть виникати через конструктивні особливості або періодичні похибки вимірювальної системи.

Центральні піки та провали на поверхні графіка вказують на максимальні та мінімальні відхилення координати  $Z$  від номінального значення. Це дає змогу візуально оцінити, в яких точках похибка є найбільшою і яким чином вона змінюється по поверхні, що може бути корисним для корекції або компенсації похибок під час роботи вимірювальної системи. Такий графік дає змогу виявити закономірності в розподілі похибок площиною, ідентифікувати ділянки з високою концентрацією похибок, які можуть впливати на точність вимірювань, підтвердити модель систематичних похибок та візуально оцінити її адекватність. Отже, ця візуалізація є важливим етапом для розуміння природи систематичних похибок і дає можливість глибше проаналізувати їхній вплив на точність вимірювань.

**Висновки.** У результаті виконаного дослідження було розроблено математичну модель для аналізу похибок вимірювань прецизійних деталей за допомогою вимірювальної руки з урахуванням систематичних, випадкових та температурних складових частин. Застосування симуляційного методу Монте-Карло дало змогу кількісно оцінити вплив кожної зі складових частин похибки на точність вимірювань та визначити найбільш критичні джерела похибок.

Модель, розроблена в рамках дослідження, демонструє:

- високий рівень достовірності у прогнозуванні похибок, що дає змогу обґрунтовано використовувати вимірювальну руку для контролю якості прецизійних деталей;
- гнучкість підходу для налаштування на різні умови експлуатації, що забезпечує широкі можливості для адаптації моделі під конкретні вимірювальні завдання;

– ефективність використання методу Монте-Карло для кількісної оцінки випадкових похибок, що дає змогу уникнути недооцінки або переоцінки похибок у нестабільних умовах вимірювання.

Перспективи подальших досліджень включають:

- підвищення точності температурних моделей, зокрема розроблення адаптивних температурних коефіцієнтів, що враховують нелінійні впливи температури на матеріали приладів та деталі;
- вдосконалення алгоритмів корекції систематичних похибок з використанням машинного навчання для виявлення складних патернів в умовах неповної інформації;
- розширення моделі на багатовимірні похибки, включно з впливом динамічних факторів, як-от вібрація та зміщення в умовах промислового виробництва;
- інтеграцію моделі із сучасними системами автоматизованого контролю для оперативного відстеження й компенсації похибок у режимі реального часу.

Запропонована модель створює підґрунтя для побудови нових алгоритмів компенсації похибок, які можуть значно покращити точність вимірювань та забезпечити стабільні результати у процесах контролю якості високо-точних виробів.

#### Список використаних джерел

1. Balsamo A., Di Leo R., Malorana P. *Evaluation of CMM uncertainty – Part I: Modelling and experimental validation*. Measurement Science and Technology. 1996.
2. Elsheikh A., Fraser D. *Metrology and machine calibration for dimensional measurement*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015.
3. ISO 14253-1. *Geometrical product specifications (GPS) – Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment – Part 1: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications*. International Organization for Standardization, 2013.
4. ISO 15530-3. *Geometrical product specifications (GPS) – Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement – Part 3: Use of calibrated workpieces or standards*. International Organization for Standardization, 2011.
5. ISO 230-2. *Test code for machine tools – Part 2: Determination of accuracy and repeatability of positioning of numerically controlled axes*. International Organization for Standardization, 2014.
6. Ramaswami K., Spanos P. *Thermal error modelling and compensation for coordinate measuring machines (CMMs)*. Precision Engineering. 2011.
7. Trapet E., Wälde F., Manske E. *Geometrical errors of coordinate measuring machines*. CIRP Annals. 2007.
8. Weckenmann A., Peggs G. *Error assessment and correction in coordinate metrology*. CIRP Annals. 2006.
9. Zhang G.X., Zhu X. *Investigation on error compensation for coordinate measuring machines*. Measurement. 2012.

#### Filonenko S. F.

*Doctor of Technical Sciences,  
Professor at the Department of Computerized Electrical Engineering Systems and Technologies,  
National Aviation University  
Kyiv, Ukraine*

**E-mail:** serhii.filonenko@npp.nau.edu.ua

**ORCID:** 0000-0002-9250-1640

#### Larin V. Yu.

*Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Head of the Department of Aeronautical Systems,  
National Aviation University  
Kyiv, Ukraine*

**E-mail:** vjlarin@gmail.com

**ORCID:** 0000-0002-5042-2426

#### Kvashuk D. M.

*Candidate of Economic Sciences,  
Senior Lecturer at Department of Computerized Electrical Engineering Systems and Technologies,  
National Aviation University  
Kyiv, Ukraine*

**E-mail:** dmytro.kvashuk@npp.nau.edu.ua

**ORCID:** 0000-0002-4591-8881

## ANALYSIS OF MEASUREMENT ERRORS OF PRECISION PARTS USING A MEASURING ARM

#### Abstract

*The article presents a detailed analysis of various types of errors that occur when measuring precision parts using a measuring arm. Measuring arms are high-tech instruments widely used in mechanical engineering, aviation industry, automotive manufacturing,*

and other fields where high accuracy and measurement repeatability are crucial. The design features of such devices allow for quick and accurate measurements of parts with various shapes, particularly those with complex geometry. However, the accuracy of measuring arms significantly depends on several factors, including operating conditions, temperature changes, design characteristics of the instrument, operator qualification, and other external factors. In particular, the influence of thermal fluctuations, which can lead to distortions in the measuring arm structure and affect the accuracy of the obtained results, is considered. The Monte Carlo method was used to analyze measurement accuracy, which allowed obtaining probabilistic characteristics of errors and determining the most influential factors causing measurement accuracy deterioration. The article proposes an automatic correction algorithm that compensates for systematic errors and reduces the influence of external conditions on measurement results. Experimental studies conducted in production conditions confirmed the effectiveness of the proposed approaches, demonstrating a significant increase in measurement reliability and data accuracy. Additionally, the paper examines methods for minimizing errors arising from human factors through automation of measurement data processing. The proposed methods and algorithms can be useful for engineers responsible for product quality control, as well as researchers in metrology interested in improving measurement technologies to enhance the accuracy of complex parts inspection.

**Key words:** measuring arm, measurement error, precision parts, Monte Carlo method, automatic correction, systematic error, measurement accuracy, quality control, temperature compensation, metrology.

### References

1. Balsamo, A., Di Leo, R., & Malorana, P. (1996). Evaluation of CMM uncertainty – Part I: Modelling and experimental validation. *Measurement Science and Technology*.
2. Elsheikh, A., & Fraser, D. (2015). Metrology and machine calibration for dimensional measurement. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*.
3. International Organization for Standardization. (2013). ISO 14253-1: Geometrical product specifications (GPS) – Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment – Part 1: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications.
4. International Organization for Standardization. (2011). ISO 15530-3: Geometrical product specifications (GPS) – Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement – Part 3: Use of calibrated workpieces or standards.
5. International Organization for Standardization. (2014). ISO 230-2: Test code for machine tools – Part 2: Determination of accuracy and repeatability of positioning of numerically controlled axes.
6. Ramaswami, K., & Spanos, P. (2011). Thermal error modelling and compensation for coordinate measuring machines (CMMs). *Precision Engineering*.
7. Trapet, E., Wälde, F., & Manske, E. (2007). Geometrical errors of coordinate measuring machines. *CIRP Annals*.
8. Weckenmann, A., & Peggs, G. (2006). Error assessment and correction in coordinate metrology. *CIRP Annals*.
9. Zhang, G. X., & Zhu, X. (2012). Investigation on error compensation for coordinate measuring machines. *Measurement*.